



TITLE:

# 反対称有向グラフにおける有向4- サイクルの個数について(コードと デザインを中心とした組合せ数学)

AUTHOR(S):

田澤, 新成

---

CITATION:

田澤, 新成. 反対称有向グラフにおける有向4-サイクルの個数について  
(コードとデザインを中心とした組合せ数学). 数理解析研究所講究録  
1986, 587: 90-92

ISSUE DATE:

1986-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99403>

RIGHT:

# 反対称有向グラフにおける有向ターサイクルの個数について

近畿大 田澤新成 (Shinsei TAZAWA)

位数  $p$  の単純グラフの族の中で弦のないターサイクルの最大個数  $t_p$  は

$$t_p = \begin{cases} \binom{n}{2}^2 & (p=2n) \\ \binom{n}{2} \binom{n+1}{2} & (p=2n+1) \end{cases}$$

であり, それの極値グラフはそれぞれ  $K_{n,n}$  と  $K_{n,n+1}$  であることが立花, 奈良[3]により示された。田澤[2]は三角形を含む弦のない連結な  $(p, g)$ -単純グラフの族に対し, 弦のないターサイクルの最大個数についての1つの上限を与えた。

ここでは, 位数  $p$  の反対称有向グラフの族の中で弦のない有向ターサイクルの最大個数について考える。そこで, 弦のないターサイクルとはこれの底グラフが弦をもたないことを意味する。この問題について, Moon and Moser[1]は反対称有向グラフの族として  $m \times n$  の2組トーナメントの族のもとで, それの最大個数は  $\lfloor m/4 \rfloor \lfloor n/4 \rfloor$  であることを示した。そこで,  $[x]$

は  $x$  を越えない最大の整数を表わす。反対称有向グラフ  $D$  に含まれる弦の  $n$  個の有向 4-サイクルの個数を  $f(D)$  とし、次の結果をえた。

定理 位数  $p$  の反対称有向グラフ  $D$  の底グラフが三角形を含まないとき、

$$f(D) \leq \frac{p^4}{128}$$

が成る。

定理の証明 有向 4-サイクル  $xyuw$  を点の列  $xyuw$  で表示する。

$\mathcal{L}(D)$  を  $D$  に含まれる弦の  $n$  個の有向 4-サイクルの集合として、

$e = uv \in E(D)$  ( $D$  の弦集合) に対し、

$$s(e) = \#\{w \in V(D) \mid \exists w' \in V(D), uvw'w \in \mathcal{L}(D)\}$$

$$t(e) = \#\{w' \in V(D) \mid \exists w \in V(D), uvw'w \in \mathcal{L}(D)\}$$

とかくと、

$$f(D) \leq \frac{1}{4} \sum_{e \in E(D)} s(e)t(e) \quad (1)$$

と成る。  $D$  の点  $x$  の出次数を  $d^+(x)$ 、入次数を  $d^-(x)$  とかくと、

$e = uv \in E(D)$  に対し

$$s(e) \leq d^-(u), \quad t(e) \leq d^+(v) \quad (2)$$

である。  $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$  とかく。  $G$  は  $D$  の底グラフとする

とき、  $G$  は三角形を含まないから、  $G$  の各辺  $uv$  に対し、

$$(d(u)-1) + (d(v)-1) \leq p-2 \quad \text{すなわち} \quad d(u) + d(v) \leq p \quad (3)$$

が成り立つ。さて, (2), (3) から

$$\lambda(e) + t(e) \leq p \quad (4)$$

をうる。さらに, (2) から

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E(D)} \{\lambda(e) + t(e)\} &\leq \sum_{u, v \in E(D)} \{d^-(u) + d^+(v)\} = 2 \sum_{u \in V(D)} d^-(u) d^+(u) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{u \in V(D)} d(u)^2 = \frac{1}{2} \sum_{u, v \in E(G)} \{d(u) + d(v)\} \end{aligned}$$

となり, (3) から

$$\sum_{e \in E(D)} \{\lambda(e) + t(e)\} \leq \frac{1}{2} \delta p \quad (5)$$

をうる。ここで,  $\delta = |E(D)|$ . 従って, 制約条件 (4), (5) の  $t$  と  $\lambda$  の右辺の上限を求めると,

$$\frac{1}{4} \sum_{e \in E(D)} \lambda(e) + t(e) \leq \frac{\delta p^2}{32} \quad (6)$$

となり,  $G$  が三角形を含まないという事実からえられた不等式  $\delta \leq p^2/4$  を (6) に適用して求める定理をうる。

### 参考文献

- [1] J.W.Moon and L.Moser(1962). On the distribution of 4-cycles in random bipartite tournaments. Canad. Math. Bull. 5, 5-12.
- [2] 田澤(1984) Motzkin-Straus 定理, 1, の応用, 日本数学会秋季総会分科会
- [3] 立花, 奈良(1984) 数理解析研究所講演予稿集